МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

БАЗОВІ ПОНЯТТЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Практикум

Дисципліни 02.02 АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ
для напряму підготовки
6.040301 – «Прикладна математика»

Рекомендовано
вченою радою
ФПМ НТУУ»КПІ»
Протокол № 3
від " 26 "   10   2015 р.

Київ
«Просвіта»
2015

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
С40

Рекомендовано вченою радою ФПМ НТУУ»КПІ»
Протокол № 3 від " 26 "   10   2015 р.

Укладачі

Сирота С. В.,	к. т. н., доцент кафедри ПМА
Мальчиков В. В.	ст. викладач кафедри ПМА
Ліскін В. О.	асистент кафедри ПМА

Відповідальний редактор *Копичко С.М.*

Рецензент д. ф-м. н., проф. *Працьовитий М.В.*

Сирота С. В.
С40 Базові поняття лінійної алгебри : Практикум дисципліни 02.02 "Алгебра і геометрія" для напряму підгот. 6.040301 "Приклад. математика" / Сирота С. В., Мальчиков В. В., Ліскін В. О. ; Нац. техн. ун-т України "Київ. політехн. ін-т". — Київ : Просвіта, 2015. — 32 с.
ISBN 978-617-7010-08-0

Навчальне видання призначене для студентів спеціальності 6.040301 – «Прикладна математика», містить вправи і приклади на теми вектори, матриці, детермінанти і системи лінійних рівнянь. Задає основні операції над ними і дає уявлення про їх властивості. Видання містить методичний апарат у вигляді завдань для самостійної роботи.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73

ISBN 978-617-7010-08-0

ВСТУП

Блок змістовних модулів МПН 02.02.01 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА входить до дисципліни 02.02 АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ визначеної освітньо-кваліфікаційною характеристикою ГСВО 6.040301 «Прикладна математика»

До блоку входять наступні змістовні модулі

1.ПФ.Д.03.ЗП.О.08.01 Поняття вектора, матриці, визначника. Операції над ними. Ортогональні системи векторів.

1.ПФ.Д.03.ЗП.О.08.02. та 1.ПФ.Д.06.ЗП.О.16.09. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь, білінійні форми.

1.ПФ.Д.03.ЗП.О.08.03.та 2.ПФ.Е.06.ПР.Р.17.01. Скінченновимірні лінійні простори. Лінійні перетворення над ними.

Метою блоку змістовних модулів є забезпечення наступних умінь

1.ПФ.Д.03.ЗП.О.08. Уміти будувати аналітичні розв'язки задач, пов'язаних з математичним моделюванням.

1.ПФ.Д.06.ЗП.О.16. Уміти будувати ефективні обчислювальні алгоритми для розрахункових задач, визначати ефективність програм, використовуючи процедури аналізу стійкості до помилок, точності, швидкодії, витрат системних ресурсів.

➔ – <u>Відповідь</u>

🡻 –<u>Розв’язок</u>

Деякі приклади наведені із розв’язками, деякі тільки із відповідями Наведені визначення носять характер домовленості про позначення (нотації),

🗒 – завдання, які потрібно виконати самостійно.

Посібник містить приклади завдання і задачі, які взяті із класичних збірників задач наведених в переліку рекомендованої літератури, біля номеру завдання виноскою вказані номера завдань у відповідному задачнику, наприклад а) [1] 3.55 означає завдання 3.55 із [1],

Практичне заняття №1

Оператор суми. Матриці. Множення матриць

Лінійна алгебра — важлива частина алгебри, що вивчає вектори, векторні простори, лінійні відображення та системи лінійних рівнянь. До лінійної алгебри відносять: теорію лінійних рівнянь, теорію визначників, теорію матриць, теорію векторних просторів та лінійних перетворень у них, теорію форм (наприклад, квадратичних), теорію інваріант (частково), тензорне числення (частково).

Позначення

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$ – вектор стовпець (стрілка вправо)

$\overleftarrow{a} = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m)$ – вектор рядок (стрілка вліво)

Коли твердження стосуються і вектора стовпця і вектора рядка позначаємо без стрілки, а лише рискою ($\overline{a}$).

Лінійні операції

Лінійними операціями є додавання ($+$) та множення ($*$ або $\times$) на число.

Властивості лінійних операцій над векторами

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$	комутативність – «переставний закон»
$\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$	асоціативність – «сполучний закон»
$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$	існування нейтрального елементу*
$\overline{a} + \overline{b} = \overline{0}$	існування протилежного елементу*
$\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$	дистрибутивність «розподільний закон»
$(\alpha\beta)\overline{a} = \alpha(\beta\overline{a})$	асоціативність
$(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$	дистрибутивність

*Чому важливі ці властивості

Поняття замкнутої множини відносно операції

Якщо над двома елементами однієї множини виконується яка-небудь арифметична операція, і отриманий результат також належить цій множині, то вважають що ця множина замкнута відносно даної операції.

Якщо результат операції над елементами множини не належить цій множині, то дана множина не замкнута відносно даної операції.

Наприклад:

- Множина натуральних чисел ($\mathbb{N}$) замкнута відносно операцій додавання і множення, оскільки результат додавання або множення будь-яких натуральних чисел є натуральним числом. Однак множина натуральних чисел не замкнута відносно операцій віднімання і ділення. Якщо відняти з меншого числа більше, то вийде від'ємне число, яке не належить ℕ при діленні можна отримати дріб, число яке також не належить ℕ.

- Множина цілих чисел (ℤ), то вона є замкнута відносно операцій додавання, множення і віднімання, відносно піднесення до натурального степеню. але не замкнута відносно ділення.
- Множина раціональних чисел (ℚ) не замкнута відносно добування кореня
- Множина дійсних чисел (ℝ) замкнута відносно майже всіх операцій, (окрім ділення на 0)

Матриця. Позначення

Матриця – математичний об'єкт, записується у вигляді прямокутної таблиці, яка представляє собою сукупність рядків і стовпців, на перетині яких знаходяться її елементи. Кількість рядків і стовпців матриці задають розмір матриці.

$$A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \overleftarrow{b}_1 \\ \overleftarrow{b}_2 \\ \dots \\ \overleftarrow{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матриці можна позначати: $\left(\qquad\right)$; $\left[\qquad\right]$; $\left\|\qquad\right\|$.

Але не слід плутати з $\left|\qquad\right|$, що схоже на модуль, але так позначають ***визначник*** матриці.

Окремі види матриць

- ***Нульова матриця*** – матриця, кожний елемент якої дорівнює нулю: $a_{ij} = 0$, $\forall i \in I$, $\forall j \in J$. Позначення: $O = \|0\|$.

- ***Діагональна матриця*** – матриця, у якої елементи, що не належать головній діагоналі, нулі. $a_{ij} = 0$, $\forall i \in I$, $\forall j \in J$, $i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- ***Одинична матриця*** – діагональна матриця, елементи головної діагоналі якої рівні 1.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- ***Трикутна матриця*** – матриця, що має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

верхня трикутна матриця або – нижня трикутна матриця відповідно.
a_{ij} – елемент матриці, що знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця.

Множення матриці на число

☐ 1 Знайти αA βA $\alpha\beta A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 2, \beta = 3$

☐ 2 Довести властивість асоціативності множення матриці на число.

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

🡻 Нехай $A = \|a_{ij}\|, i = \overline{1..n}, j = \overline{1..m}$ і $\alpha A = \|b_{ij}\|$,
тоді за визначенням $b_{ij} = \alpha a_{ij}$
але операція множення чисел асоціативна, отже $(\alpha\beta)a_{ij} = \alpha(\beta a_{ij})$.

Додавання матриць

Нехай матриця $A = \|a_{ij}\|$, $i = \overline{1..n}$, $j = \overline{1..m}$, матриця $B = \|b_{ij}\|$, тієї ж розмірності, тоді матриця $C = A + B$ складається з елементів $C = \|c_{ij}\|$ таких, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

☐ 3. Знайти суму матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

☐ 4. Довести:

а) $A + B = B + A$

🡻 Нехай $A + B = C$, а $B + A = C'$,
за визначенням додавання матриць $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ та $c_{ij}' = b_{ij} + a_{ij}$
оскільки додавання чисел комутативне, $c_{ij} = c_{ij}'$, отже $C = C'$.

b) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Транспонування матриць

Транспоновану матрицю можна отримати, записавши рядки A як стовпчики A^T. Або для квадратної матриці діагональ залишається на місці, а елементи симетрично змінюють місце відносно діагоналі. $a_{ij} = a_{ji}$

☐ 5.Транспонувати матрицю A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ➔ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Оператор суми

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

☐ 6 Знайти суму елементів з номерами від 12 до 42 без 33.

➔ $\sum_{i=12}^{42} a_i - a_{33}$

☐ 7 Знайти суму елементів з непарними номерами. ➔ $\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1}$

Дано квадратну матрицю A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

☐ 8. Знайти суму елементів:

a) на головній діагоналі ➔ $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
b) на побічній діагоналі ☺☺
c) на діагоналі над головною діагоналлю ➔ $\sum_{i=1}^{n} a_{ii+1}$
d) над головною діагоналлю ➔ $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}$

Множення матриць

$$C = A \times B \text{ або } C = AB$$

Множення матриць ($A \times B$) – є операція обчислення матриці C, кожен елемент якої дорівнює сумі добутків елементів у відповідному рядку першого множника і стовпці другого.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Кількість стовпців в матриці A має збігатися з кількістю рядків у матриці B, це називається що, матриця A є ***узгодженою*** до матриці B.

Якщо матриця A має розмірність $m \times n$, B - $n \times k$, то розмірність їхнього добутку $A \times B = C$ є $m \times k$.

9. Обчислити

a)[1] 3.79

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)[1] 3.80

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & -4 & 6 & 13 \\ 12 & -9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

d) [1] 3.82

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$$

e)[2] 790

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

f)[2] 793

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

g)[2] 798

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Практичне заняття №2

Властивості операцій над матрицями. Многочлени від матриць. Визначники

Властивості операцій над матрицями

1. Довести

a) $$A(B+C)=AB+AC,$$

🡻Нехай $A(p,q)$, $B,C(q,r)$ – узгоджені матриці. Тоді за визначенням додавання і множення матриць, а також властивостями додавання і множення чисел:

$$A(B+C)=\left\{\sum_{j=1}^{q}a_{ij}(b_{jk}+c_{jk})\right\}_{\substack{i=\overline{1,p}\\ j=\overline{1,r}}}=\left\{\sum_{j=1}^{q}a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{q}a_{ij}c_{jk}\right\}_{\substack{i=\overline{1,p}\\ j=\overline{1,r}}}=AB+AC$$

b) $$(AB)C=A(BC),$$

🡻Нехай: $A(p,q)$, $B(q,r)$, $C(r,s)$, – відповідно узгоджені матриці. Тоді за визначенням множення матриць і властивостями додавання і множення чисел:

$$(AB)C=(\sum_{k=1}^{r}(\sum_{j=1}^{q}a_{ij}b_{jk})c_{kh})=(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{q}a_{ij}b_{jk}\,c_{kh})=(\sum_{k=1}^{r}a_{ij}(\sum_{j=1}^{q}b_{jk}\,c_{kh}))$$
$$=A(BC)$$

c) Порівняти кількість операцій множення і додавання обох випадках

$$(A_{20\times2}\times B_{2\times100})\times C_{100\times5} \text{ та } A_{20\times2}\times(B_{2\times100}\times C_{100\times5})$$

2. Обчислити AB та BA.

a) $$A=\begin{pmatrix}5&2&-3\\2&4&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&11\\6&5\\1&7\end{pmatrix}$$

🡻 $$AB=\begin{pmatrix}5&2&-3\\2&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&11\\6&5\\1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&44\\34&84\end{pmatrix}$$
$$BA=\begin{pmatrix}2&11\\6&5\\1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2&-3\\2&4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32&48&60\\40&32&12\\19&30&39\end{pmatrix}$$

b) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

🡻 $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 52 & 32 \\ 107 & 124 & 96 \\ -36 & -40 & -24 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 34 & 22 & 22 \\ 1 & 25 & 14 & 13 \\ 3 & 26 & 21 & 24 \\ 49 & 69 & 82 & 97 \end{pmatrix}$$

🗒 3. Довести властивості транспонування матриць

1) $(A^T)^T = A$
2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3) $(A + B)^T = A^T + B^T$
4) $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

Многочлени від матриць

🗒 4. Знайти значення многочлена від матриці

a)[1] 3.90 $f(x) = 3x^2 - 4$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

🡻 $$B = 3A^2 - 4I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$$

b)[1] 3.92 $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

➔ $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$

c)[2] 804 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ ➔ $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d)[2] 805 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$ ➔ $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

e)[2] 828 $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$

➔ $\begin{pmatrix} 10 & 1 & -134 \\ 2 & -2 & -26 \\ 1 & 1 & -26 \end{pmatrix}$

Визначники

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $detA = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $detA = \sum_{i=1}^{3} a_{1i} A_{1i} =$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

- Схема Сарюса:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$ Увага! тільки для порядку менше 3-х

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

5. Знайти визначник матриці A

a) $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

⬇$detA =$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot (-3) - \big((-3) \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 1\big) =$$

$$= 1 + 0 + 6 + 9 + 4 + 0 = -20$$

b) $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ ➔-202

c) $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}$ $\qquad$ ➔87

d)[2] 47 $\qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad$ ➔0

e)[2] 48 $\qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ ➔1 f)[2] 53 $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 25\\ 1 & 7 & 49\\ 1 & 8 & 64\end{pmatrix}$ ➔6

6. Знайти визначник

a)[2] 63 $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & 1\\ \sin\beta & \cos\beta & 1\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1\end{vmatrix}$ b)[2] 107 $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta)\\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta)\\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta)\end{vmatrix}$

➔$\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$

Підрахунок визначників третього порядку з використанням властивостей

7. Не розгортаючи визначник, довести тотожність

a)[2]112 $\begin{vmatrix}a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1\\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2\\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3\end{vmatrix}=-2x\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

b)[2]114 $\begin{vmatrix}a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1\\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2\\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3\end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

<u>Практичне заняття №3</u>

Знаходження визначників

1. [1] 3.54 Знайти визначник, використовуючи розкриття за рядком чи стовпчиком.

a) $\begin{vmatrix}2 & -3 & 4 & 1\\ 4 & -2 & 3 & 2\\ a & b & c & d\\ 3 & -1 & 4 & 3\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ b & 0 & 1 & 1\\ c & 1 & 0 & 1\\ d & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$

➔$8a+15b+12c-19d$ ➔$2a-b-c-d$

2. Знайти визначник:

a) [1] 3.55 $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 6 & 1\end{vmatrix}$ b) [1] 3.57 $\begin{vmatrix}3 & -1 & 4 & 2\\ 5 & 2 & 0 & 11\\ 0 & 2 & 1 & -3\\ 6 & -2 & 9 & 8\end{vmatrix}$

➔0 ➔223

b) [1] 3.61 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ ➔394

c) [2] 261 $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ ➔18

d) [2] 270 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$ ➔52

e) [2] 274 $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$ ➔100

🡻 Вказівка від Р.3 відняти Р.1, після чого від С.1 відняти С.5

☐ 3. Знайти визначник порядку n за допомогою зведення до трикутного виду

a)[1] 3.67 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ ➔$n!$

b)[1] 3.68 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$ ➔$2n+1$

☐ 4. Знайти визначник порядку n методом рекурентних співвідношень a)[1] 3.65

$$\begin{vmatrix} a & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad ➔ a^n$$

🡻 Вказівка. Довести, що вихідний визначник $\Delta_n(a)$ можна представити як $\Delta_n(a) = a\Delta_{n-1}(a)$

b)[1] 3.66

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad ➔ a^n + b^n$$

c)[1] 3.71

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad ➔ -a_1 a_2 \dots a_n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

d)[1] 3.72

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} \quad ➔ n+1$$

e)[2] 280

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix} \quad ➔ n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

f)[2] 284

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} \quad ➔ (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^n$$

g)[2] 301

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix} \quad ➔ \frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3}$$

h)[2] 303 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad ➔ 5 \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-1}$$

<u>Практичне заняття №4</u>

Знаходження оберненої матриці
Розв’язок матричних рівнянь

Знаходження оберненої матриці через приєднану

☐ 1. Знайти обернену матрицю

a) [1] 3.114 $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow detA = -3 \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

b)[2] 843 $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad ➔ A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Знаходження оберненої матриці методом елементарних перетворень

☐ 2. Знайти обернену матрицю

a)[1] 3.117 $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right)}_{\text{записали } (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I})} \sim \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right)}_{\text{від } P_1 \text{ відняли } P_3} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{37} & \mathbf{26} & \mathbf{-5} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{17} & \mathbf{12} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{20} & \mathbf{14} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{17} & \mathbf{12} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{array}\right) \sim$$

$P_3 - 5\cdot P_1$, $P_4 - 2\cdot P_1$ $\qquad$ $P_2 - 2\cdot P_4$, $P_4 - 3\cdot P_3$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{20} & \mathbf{14} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-43} & \mathbf{-30} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-33} & \mathbf{-23} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-6} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{20} & \mathbf{14} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{-7} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-59} & \mathbf{43} & \mathbf{99} & \mathbf{-159} \end{array}\right) \sim$$

$-P_3 + P_4$, $10\cdot P_4 + 33\cdot P_3$ $\qquad$ $P_3 + 7\cdot P_4$, $P_2 - 14\cdot P_4$, $P_1 + 5\cdot P_4$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & 0 & -294 & 215 & 495 & -796 \\ 0 & 1 & 20 & 0 & 823 & -602 & 1385 & 2228 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 410 & -300 & -690 & 1110 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -59 & 43 & 99 & -159 \end{array}\right), A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$$

після очевидних перетворень отримаємо $(I|A^{-1})$

b)[1] 3.116 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ➔ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}25 \\ 0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

c)[2] 845 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ ➔ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

Розв'язок матричних рівнянь

Нехай матриця A – квадратна, невироджена.

$A * X = B$	$X * A = B$
$A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$	$X * A * A^{-1} = B * A^{-1}$
$X = A^{-1} * B$	$X = B * A^{-1}$

3. Розв'язати матричне рівняння

a) $A * X * B = C$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 25 & -15 \\ 26 & 10 \end{pmatrix}$.

🡻 $X = A^{-1} * C * B^{-1}$ – формульний розв'язок

Правило знаходження оберненої матриці розмірності 2×2:

1) діагональні елементи поміняти місцями;
2) у елементів побічної діагоналі змінити знак на протилежний;
3) множимо на $\frac{1}{detA}$.

$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

b)[2] 861 $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c)[2] 863 $\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

d)[1] 3.123 $\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

e)[1] 3.125 $\quad X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

f)[2] 864 $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

g)[2] 866 $\quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Практичне заняття №5

Лінійна незалежність

Лінійна комбінація

Дана система алгебраїчних векторів $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$ **лінійною комбінвцією** цих векторів називається **сума** $\boldsymbol{\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n}$, де $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ будь-які числа

🗒 1. Дано елементи: A,Θ,Ξ,♥,♪,♕,♂,☺. Скласти їх лінійну комбінацію.

🡻 α_1A+ α_2Θ+ α_3Ξ+α_3♥+ α_4♪+ α_5♕+ α_6♂+ α_7☺, де $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_7$ будь-які числа

Лінійна залежність/незалежність

Розглянемо лінійну комбінацію векторів: $\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{0}$.

Лінійна комбінація називається тривіальною якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Якщо в даній системі векторів дорівнює нулю лише її тривіальна лінійна комбінація, така система називається **лінійно незалежною**, в іншому випадку **лінійно залежною**

☐ 2. Дано вектори: $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$, $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$, знайти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ при яких лінійна комбінація $\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \alpha_3\bar{x}_3 = \bar{0}$.

🡇 очевидно це тільки $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, отже дана система векторів – лінійно незалежна.

☐ 3. Дано вектори: $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\8\\1\end{pmatrix}$, $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$, знайти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ при яких лінійна комбінація $\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \alpha_3\bar{x}_3 = \bar{0}$.

🡇 неважко помітити, що при $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -2$,

$\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\8\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} = \bar{0}$, отже дана система векторів – лінійно залежна.

Як виявити чи є система векторів лінійно незалежною?

Ознаки лінійної незалежності:

- дорівнює $\bar{0}$ лише тривіальна лінійна комбінація;
- жоден з векторів з цієї системи не можна виразити через лінійну комбінацію інших;
- якщо з векторів скласти матрицю і визначник цієї матриці не дорівнює нулю.

☐ 4. Довести

a)[2] 646, що система векторів, що містить два рівні вектори, лінійно залежна.

b)[2] 647 Довести, що система векторів, два вектори якої розрізняються скалярним множником, лінійно залежна.

c)[2] 648 Довести, що система векторів, що містить нульовий вектор, лінійно залежна.

d)[2] 649 Довести, що якщо частина системи векторів лінійно залежна, то і уся система лінійно залежна.

e)[2] 652 Довести, що якщо три вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, лінійно залежні і вектор $\bar{a}_3$ не виражається лінійно через вектори $\bar{a}_1$, і $\bar{a}_2$, то вектори $\bar{a}_1$, і $\bar{a}_2$ розрізняються між собою лише числовим множником.

f)[2] 653 Довести, що якщо вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …,$\bar{a}_k$ лінійно незалежні, а вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …,$\bar{a}_k$, $\bar{b}$ лінійно залежні, то вектор b лінійно виражається через вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …,$\bar{a}_k$.

g)[2] 655 Довести, що впорядкована система векторів $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …,$\bar{a}_k$, відмінних від нуля, тоді і тільки тоді лінійно незалежна, коли жоден з цих векторів лінійно не виражається через інші.

h)[2] 656 Довести, що якщо до впорядкованої лінійно незалежної системи векторів $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …,$\bar{a}_k$, приписати попереду ще один вектор $\bar{b}$, то не більше ніж один вектор отриманої системи лінійно виражатиметься через інші.

i)[2] 657 Довести, що якщо вектори $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …,$\overline{a_s}$, лінійно незалежні і лінійно виражаються через вектори $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$,., $\overline{b_r}$, то $r \le s$.

4. Знайти усі значення λ, при яких вектор $\overline{b}$ лінійно виражається через вектори $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …,$\overline{a_s}$:

a)[2] 665 $\overline{a_1}$=(2, 3, 5), $\overline{a_2}$=(3, λ, 8), $\overline{a_3}$=(1, − 6, 1)

↓ складемо матрицю $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & \lambda & 8 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$, порахуємо її детермінант:

b)[2] 668 $\overline{a_1}$=(3, 2, 5), $\overline{a_2}$=(2, 4, 7), $\overline{a_3}$=(5, 6, λ)

5. Знайти усі бази системи векторів

a)[2] 673 $\overline{a_1}$=(1, 2, 0, 0), $\overline{a_2}$=(1, 2, 3, 4), $\overline{a_3}$=(3, 6, 0, 0)

b)[2] 674 $\overline{a_1}$= (1, 2, 3, 4), $\overline{a_2}$==(2, 3, 4, 5), $\overline{a_3}$=(3, 4, 5, 6), $\overline{a_4} = (4, 5, 6, 7)$

6. [3] 1.2.9 Нехай $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ - лінійно незалежна система векторів. Чи будуть, лінійно незалежні наступні системи векторів :

а) $\overline{x}$, $\overline{x}+\overline{y}$, $\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$

б) $\overline{x}+\overline{y}$, $\overline{y}+\overline{z}$, $\overline{z}+\overline{x}$

в) $\overline{x}-\overline{y}$, $\overline{y}-\overline{z}$, $\overline{z}-\overline{x}$

7. [3] 1.2.10 Показати, що для будь-яких векторів $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ і будь-яких чисел α, β, γ система векторів $\alpha\overline{x}-\beta\overline{y}$, $\gamma\overline{y}-\alpha\overline{z}$, $\beta\overline{z}-\gamma\overline{x}$ лінійно залежна.

Практичне заняття №6

Ранг матриці

Рангом матриці A є порядок найбільшого ненульового мінору, або кількість лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці.

Метод обвідних мінорів

Метод обвідних мінорів полягає в тому, що

1. шляхом перестановки рядків або стовпчиків на місце елемента a_{11} ставиться ненульовий елемент, тоді мінор 1-го порядку відмінний від 0, відповідний стовпчик і рядок фіксуються і стають базисними.
2. Шляхом перестановки інших рядків або стовпчиків знаходиться мінор наступного порядку відмінний від 0. Якщо такого не знайшлось, то ранг матриці був встановлений на попередньому кроці, якщо знайшовся мінор відмінний від 0, відповідні стовпчики і рядки фіксуються і стають базисними ранг встановлюється на 1 більше.
3. повторюється п.2.

1. Знайти ранг матриці методом обвідних мінорів.

a) $$A=\begin{pmatrix}1&2&3&3\\4&5&6&2\\7&8&9&1\end{pmatrix}$$

$M_1^1=|1|=1$ мінор першого порядку відмінний від 0

$M_2^1=\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-3$ мінор другого порядку відмінний від 0 обвідний мінор $\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}$ фіксується і розглядаються мінори 3-го порядку, які можна утворити навколо зафіксованого:

$$M_3^1=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=0 \qquad M_3^2=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&2\\7&8&1\end{vmatrix}=0$$

більше мінорів 3-го порядку немає, отже *rangA*=2.

b) [2] 609 $A=\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{pmatrix}$ $\rightarrow 3$

c) [2] 610 $A=\begin{pmatrix}3&-1&3&2&5\\5&-3&2&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&1&4&1\end{pmatrix}$ $\rightarrow 3$

d) [2] 611 $A=\begin{pmatrix}4&3&-5&2&3\\8&6&-7&4&2\\4&3&-8&2&7\\4&3&1&2&-5\\8&6&-1&4&-6\end{pmatrix}$ $\rightarrow 2$

2. Чому дорівнює ранг матриці прирізних значеннях λ

a) [2] 613 $A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ 2 при $\lambda=3$, 3 при $\lambda\neq 3$

b) [1] 3.156 $A=\begin{pmatrix}3&1&1&4\\\lambda&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ 2 при $\lambda=0$, 3 при $\lambda\neq 0$

Метод елементарних перетворень

3. Знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 3 & -9 \\ 4 & -19 & 19 & 6 & -26 \\ 8 & -39 & 36 & 25 & -52 \\ 2 & -9 & 11 & 1 & -5 \\ 4 & -20 & 17 & 20 & -23 \end{pmatrix}$ ↓~ $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$ ~7

~ $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$ ~ $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ rangA=4

b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 10 & -7 \\ 5 & -14 & 16 & 44 & -30 \\ 8 & -23 & 26 & 73 & -42 \\ 2 & -5 & 7 & 15 & -6 \\ 3 & -9 & 10 & 30 & -9 \end{pmatrix}$ ➔4

c)[2] 620 $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$ ➔2

d)[2] 621 $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$ ➔3

4.[2] 680 Знайти яку-небудь базу системи векторів і вектор системи, що не входить в цю базу і може бути виражений, через вектори бази

$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \overline{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix}, \overline{a}_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$

↓ Складемо матрицю із даних векторів

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 15 & 17 \\ 7 & -6 & -7 & 10 \end{pmatrix}$$

методом обвідних мінорів знаходимо ранг цієї матриці з відмінністю в тому, що для знаходженя кожного наступного мінору переставляються лише рядки.

$M_2^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, отже $\overline{a}_1$ і $\overline{a}_2$ лінійно незалежні.

$M_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, отже $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ лінійно незалежні.

$M_4^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 15 & 17 \end{vmatrix} = 0$, отже $\overline{a}_4$ є лінійною комбінацією $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$

$M_4^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 7 & -6 & -7 & 10 \end{vmatrix} = -20$, отже $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, $\overline{a}_5$ лінійно незалежні і утворюють базу а вектор $\overline{a}_4$ може бути виражено через $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$

5.[1] 3.181 Знайти ранг і базис заданої системи векторів:

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Практичне заняття №8

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь – система m лінійних рівнянь з n невідомими, загального вигляду $A\bar{x} = \bar{b}$, де A – коефіцієнти системи, $\bar{x}$ - невідомі, $\bar{b}$ - вільні члени.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь в загальному вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\quad\quad\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Розв’язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь є будь-яка сукупність дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, яка при підстановці в кожне рівняння системи перетворює його в тотожність.

Якщо система має хоча б один розв’язок, то вона називається **сумісною**, і **несумісною**, якщо не має жодного.

Сумісна система називається **визначеною**, якщо вона має єдиний розв’язок, і **невизначеною**, якщо вона має безліч розв’язків.

Якщо всі вільні члени $b_i = 0$, система лінійних алгебраїчних рівнянь називається **однорідною**. Однорідна система очевидно має розв'язок, у якому всі $x_i = 0$. Цей розв'язок називають **тривіальним**. Відмінні від тривіального розв'язки існують тільки тоді, коли матриця вироджена, тобто $det(A) = 0$.

Алгоритм розв’язку СЛАР:

1) Визначити тип системи (неоднорідна ($A\bar{x} = \bar{b}$). або однорідна ($A\bar{x} = \bar{0}$) тоді перехід на П. 4;
2) для неоднорідних записати основну і розширену матрицю;
   Якщо:
   а) $rangA = rang(A|b)$ – розв’язок єдиний, система сумісна, П.3;
   б) $rangA < rang(A|b)$ – розв’язок не існує, (стоп);
   в) $rang(A|b) < n$ (кількості невідомих)– розв’язків ∞;
3) у випадку коли система сумісна знаходимо єдиний розвязок одним з наступних методів: Крамера, матричний, Гауса, Жордано-Гауса (стоп);
4) методом виключення невідомих Гауса звести матрицю системи до верхнє-трикутного вигляду і знайти загальний розв’язок.

Розв’язок визначених СЛР

1.Дослідити на сумісність

а)
$$\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 6 \\ 2 & 3 & -7 & | & 16 \\ 5 & 2 & 1 & | & 16 \end{pmatrix} detA = 3 - 8 - 35 + 30 - 2 - 14 = 2$$

$rangA = 3$ Система сумісна.

b)
$$\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 3x + 4y - 9z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 6 \\ 2 & 3 & -7 & | & 16 \\ 3 & 4 & -9 & | & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 6 \\ 0 & 1 & -3 & | & 4 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 6 \\ 0 & 1 & -3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$rangA$ =2, $rang(A|b) = 3$ система несумісна

2. знайти розв’язок системи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

а) матричним методом

$$\Downarrow\ A\overline{x}=\overline{b}:\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\4&1&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\-2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\4/3&0&-1/3\\5/3&1&-2/3\end{pmatrix}\ \overline{x}=A^{-1}\times\overline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

b) методом Крамера

$$\Downarrow\ \Delta=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\4&1&4\end{pmatrix}=3 \qquad \Delta_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\-5&-1&2\\-2&1&4\end{pmatrix}=3$$

$$\Delta_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-5&2\\4&-2&4\end{pmatrix}=6 \qquad \Delta_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\4&1&4\end{pmatrix}=-6$$

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=1, \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=2, \quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-2$$

c) методом Гауса

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&-1&2&-5\\4&1&4&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-2&1&-6\\0&-3&0&-6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-0.5&3\\0&0&-1.5&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-0.5&3\\0&0&1&-2\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\ x_2+0.5x_3=3\\ x_3=-2\end{cases}\sim\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\\ x_3=-2\end{cases}$$

d) методом Жордана-Гауса

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-0.5&3\\0&0&1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-2\end{array}\right)$$

3. знайти розв’язок СЛР методом Крамера

a)[1] 3.190

$$\begin{cases}7x+2y+3z=15\\5x-3y+2z=15\\10x-11y+5z=36\end{cases}$$

b)[1] 3.192

$$\begin{cases}x+y-2z=6\\2x+3y-7z=16\\5x+2y+z=16\end{cases}$$

c)[1] 3.200

$$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3+x_4=4\\4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6\\8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12\\3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6\end{cases}$$

d)[1] 3.203

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3=0\\3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6=0\\6x_1+8x_2+x_3+5x_4+8=0\\3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8=0\end{cases}$$

e)[2] 554

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

f)[2] 555

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

g)[2] 558

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

h)[2] 562

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

i)[2] 563

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5 \\ 3x - 7y + 3z - t = -1 \\ 5x - 9y + 6z + 2t = 7 \\ 4x - 6y + 3z + t = 8 \end{cases}$$

Розв'язок однорідних СЛР

Якщо $rangA = n$ або $detA \neq 0$ – тільки тривіальний розв'язок $\bar{x} = \bar{0}$

4. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок ОСЛР

a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$ ➔ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $detA = -3,$ *x=y=z=0*

Якщо $rangA < n$, система має безліч розв'язків. Кожен розв'язок називають **частковим розв'язком системи**. Сукупність усіх часткових розв'язків називають **загальним розв'язком системи**.

b) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

➔ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

c)[1] 3.225

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

d)[1] 3.228

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

e)[1] 3.229

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

f)[2] 724

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

g)[2] 725

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

h)[2] 727

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

i)[2] 730

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

j)[2] 731

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

<u>Практичне заняття №9</u>

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1.[1] 3.234 Знайти значення параметра a, при яких система має нетривіальні розв’язки, і знайти їх.

$$\text{T}\begin{cases} a^2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

2. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв’язок систем.

a) [1] 3.211

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

b) [1] 3.216

$$\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 24x_4 + 27x_5 = 5 \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8 \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9 \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4 \end{cases}$$

3. [1] 3.237 Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи використовуючи фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$$

4. Дослідити на сумісність Методом Жордана-Гауса і знайти загальний розвязок:

a) [1] 3.242

$$\begin{cases} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 = 84 \\ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 = 72 \\ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 = 59 \end{cases}$$

b) [1] 3.244

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 0x_2 + x_3 + 24x_4 = 1 \\ 0x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок рішення і однин частковий розв'язок системи рівнянь.

a) [2] 695

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18 \end{cases}$$

b) [2] 697

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

c) [2] 700

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 0x_5 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

d) [2] 702

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

e) [2] 703

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$$

6. Користуючись методом виключення невідомих, дослідити сумісність і знайти загальний розв'язок систем рівнянь (якщо початкова система має цілі коефіцієнти, то в процесі виключення невідомих можна уникнути дробів)

a) [2] 710

$$\begin{cases} 0x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 25x_4 = 29 \\ 27x_1 + 24x_2 - 32x_3 + 47x_4 = 55 \\ 50x_1 + 51x_2 - 68x_3 + 95x_4 = 115 \\ 31x_1 + 21x_2 - 28x_3 + 46x_4 = 50 \end{cases}$$

b) [2] 711

$$\begin{cases} 24x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 41x_5 = 28 \\ 36x_1 + 21x_2 + 45x_3 + 61x_4 + 62x_5 = 43 \\ 48x_1 + 28x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 83x_5 = 58 \\ 60x_1 + 35x_2 + 75x_3 + 99x_4 + 102x_5 = 69 \end{cases}$$

7. Дослідити систему і знайти загальний розв’язок в в залежності від значення параметра λ

a) [2] 713

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2 \end{cases}$$

b) [2] 717

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа. / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича - М.:Наука, 1986. — 464 с.

2. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. — М.: Наука, 1978. - 384 с.

3. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре / Х.Д. Икрамов. — М.:Наука, 1975. — 320 с.

4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. — 13-е изд., испр. — М.: Наука, 1980. — 240 с.

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов» / Д. В. Беклемишев. — 10-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 304 с.

2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре / И.М. Гельфанд — 5-е изд., исправленное.— М. : Добросвет, Московский центр непрерывного математического образования, 1998.— 320 с.

3. Воеводин В.В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. — М.: Наука, 1980 - 400 с.

4. Ильин В.А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М.: Физматлит, 2001. - 320 с.

5. Кострикин А. И. Ввведение в алгебру. Ч.1. Основы алгебры / А. И. Кострикин.— М.:Физматлит, 2000. - 231 с.

6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.2. Линейная алгебра / А. И. Кострикин. — М.: Физматлит, 2000. — 368 с.

7. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П.С. Александров. — М.: Наука, 1979. — 512 с.

10. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. — М.: Наука, Физматлит, 1998. — 224 с.

11. Рудавський Ю. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник /, Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, та ін. — Львів: Видавництво Державного університету "Львівська політехніка", 1999. — 262 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Сирота Сергій Вікторович
Мальчиков Володимир Вікторович
Ліскін Вячеслав Олегович

БАЗОВІ ПОНЯТТЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Практичні заняття

Дисципліни 02.02 АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ
для напряму підготовки
6.040301 – «Прикладна математика»

Відповідальний за випуск *Сирота С.В.*
Відповідальний редактор ?????

Промислово-торговельна фірма «Просвіта»
у формі товариства з обмеженою відповідальністю.
01032,Київ, бульвар Т. Шевченка, 48,
тел. (044) 234-15-86, 234-95-23 (факс).
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 221 від 16.10.2000 р.

Підп. до друку **03.11.15**. Формат 60х84$^{1}/_{16}$. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – різограф. Ум .друк. арк. 1,85. Обл.-вид. арк. 1,0 Зам. №
.
Наклад 130 пр.

НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка»
03056, київ, вул. Політехнічна, 14, корпус 15
тел./факс (044) 406-81-78